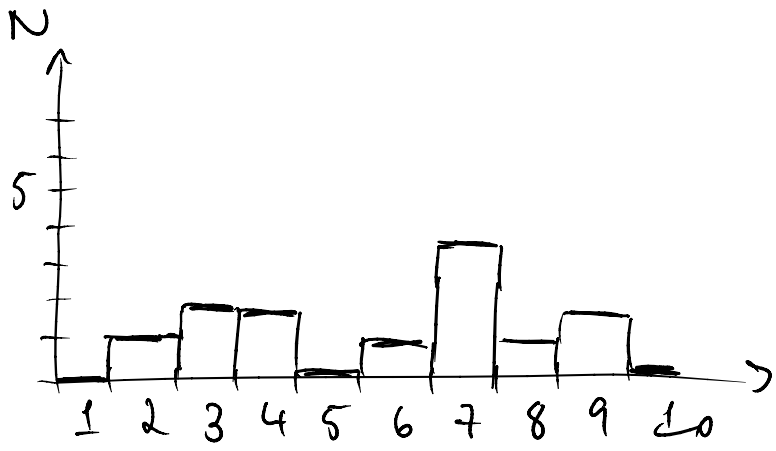
„Random numbers" und Gaussverteilung

Saturday, June 25, 2016 1:34 PM

- Was ist „random"?

Experiment: Frage eine Gruppe von Leuten nach einer Zahl zwischen 1 und 10

↳ am 31.10.2016 am ics:



⟹ ungerade Zahlen werden häufiger gewählt, und fast 30% der Befragten sagten 7 (wahrscheinlich weil 7 einer Primzahl ist)

↳ Leute suchen nach besonderen Eigenschaften...

- Zufälligkeit ist nur im Kontext sinnvoll:

  1 aus $M = \{1\}$ ist nicht random

  1 aus $M = \{2, 5, 1, 4, 9, 3, \dots\}$ ist schon zufälliger

↳ Sequenz sollte keine erkennbaren Muster haben

- Random number generator:

$$(C \cdot X_0 + i) \,\%\, m = X_{n+1}$$

X_0 – seed

m – modulus (e.g. $2^{48}, 2^{32}, 2^{64}$)

$0 < C < m$ (e.g. Primzahl)

$0 \leq i < m$ (e.g. 1 oder coprime)

↳ durch die Moduloperation ist auch diese Sequenz

↳ durch die Modulooperation ist auch diese Sequenz irgendwann zyklisch und weist Muster auf

- Die Physik kommt zur Rettung:

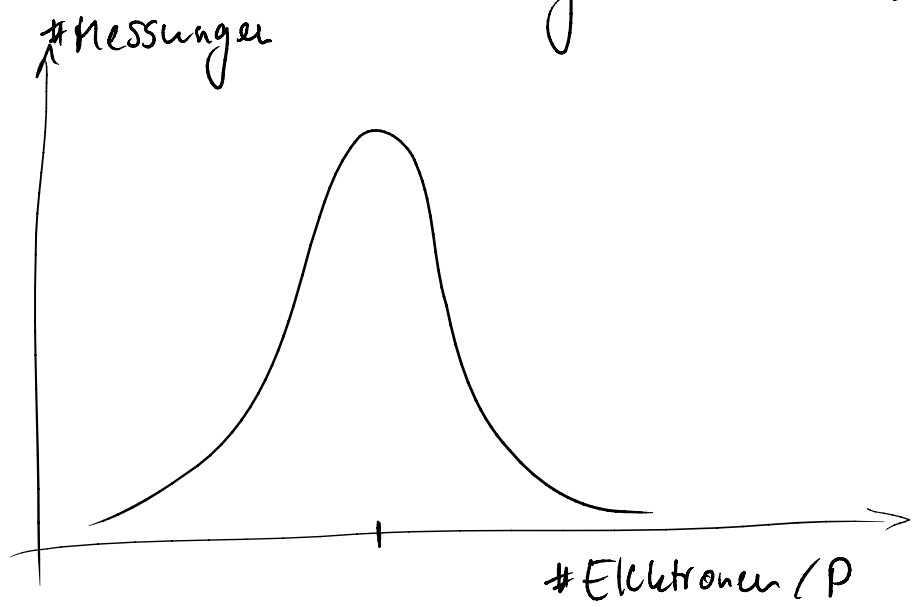
spontaner Zerfall von radioaktivem Material ist total zufällig, z.B.:

$$Sr^{90} \xrightarrow{\beta} Y^{90} + e^- + \bar{\nu}_e$$

immer wenn ein Neutron durch β-Zerfall in ein Proton umgewandelt wird, werden zusätzlich ein Elektron und ein Neutrino ausgesendet.

(Ladungs-/Leptonerhaltung)

Messung der Elektronen über eine gewisse Messperiode (P) ergibt in etwa:



↳ Abweichungen vom Mittel gaussverteilt, aber einzeln total zufällig!

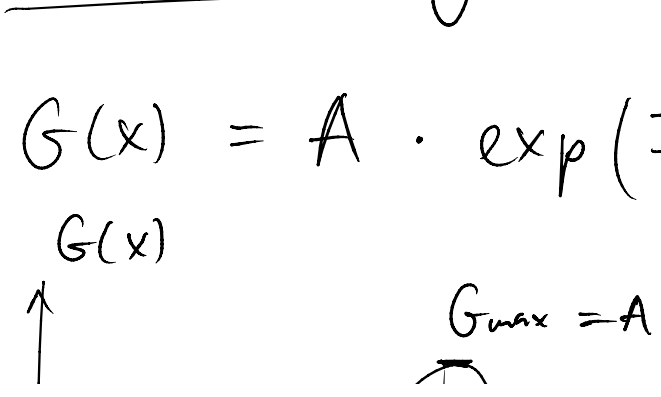
- Gaussverteilung:

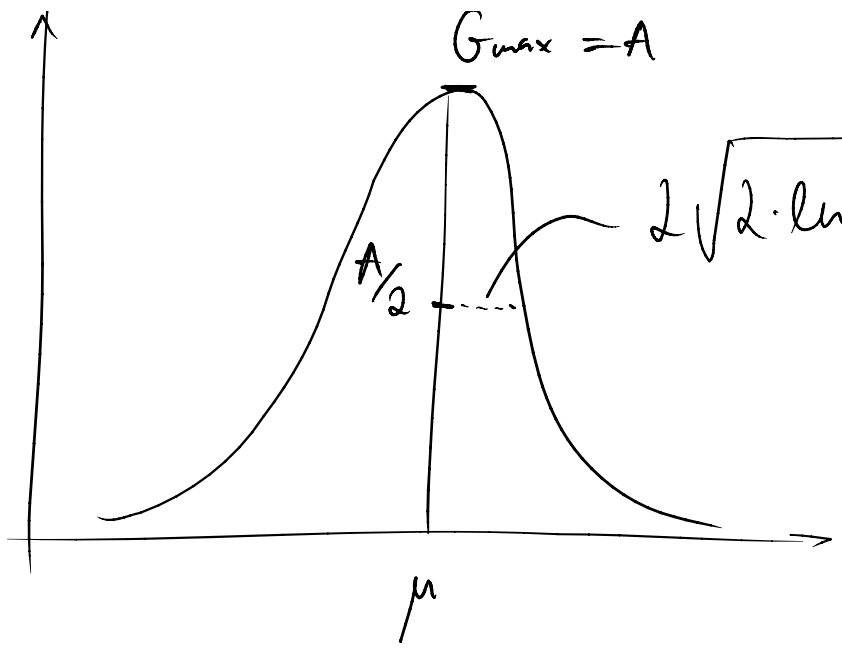
$$G(x) = A \cdot \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ: Mittel

σ^2: Varianz

σ: Standardabweichung





σ : Standardabweichung

$1\sigma \sim 68\%$ aller Messungen
$2\sigma \sim 95\%$ "
$3\sigma \sim 99\%$ "

- Normalverteilung mit $\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \equiv 1$

↳ $1 = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$

o.B.d.A. $\mu = 0$
Fläche der Kurve ändert nicht mit Transformation
$x \to x + \mu$

$= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) dx$

$= \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow N(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

- Aber warum ist $G(x) / N(x)$ so besonders ?

↳ Zwei Gründe: (i) „Central limit theorem" (CLT)
(ii) maximale Entropie

i) Sei $\{X_n\}$ ein Set von zufälligen Zahlen aus dem selben Wahrscheinlichkeitsraum P mit Mittel μ_n

selben Wahrscheinlichkeitsraum P mit Mittel $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$. Dann gilt:

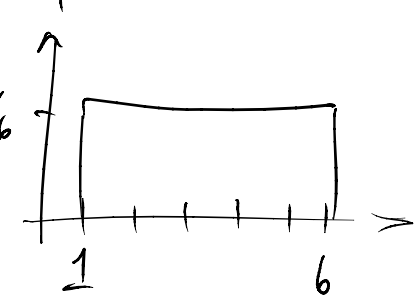
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum^{n} x_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq z\right) = \phi(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}$$

wobei $\phi = N(\mu=0, \sigma=1)$.

Mit anderen Worten: selbst wenn man einen unbekannten zufälligen Prozess hat, häufige Wiederholungen dieses Prozesses folgen einer Gaussverteilung.

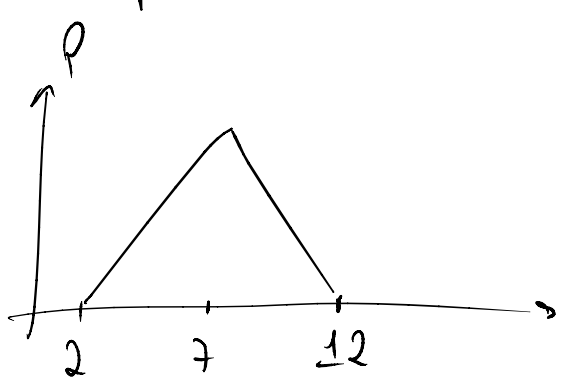
- Siehe Python-Demo:

  Nehme 1 Würfel:

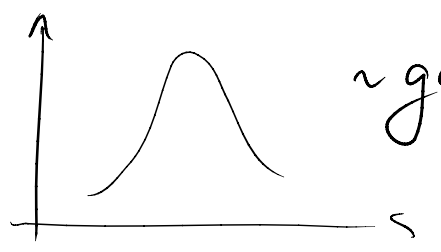


  selbe Wahrscheinlichkeit für alle Seiten

  Aber 2 Würfel:



  und $n \to \infty$ Würfel:



ii) Gaussverteilung maximiert Entropie für eine gegebene Energie.

z.B. $E = \frac{1}{2}mv^2$: für ein Gas in einer gewissen Temperatur $T \propto v^2$

Temperatur ... ist die Geschwindigkeit der Gaspartikel gaussverteilt.

- Wie erzeuge ich zufällige, gaussverteilte Zahlen?

Ls Python-Demo: CLT-Methode eine Möglichkeit, jedoch sehr ineffizient...

⇒ Box-Müller-Methode: geometrische Methode, die uniform-verteilte zufällige Punkte zu gaussverteilten Punkten transformiert.

Zwei zufällige Zahlen: (z.B. x, y Koordinaten)

```
double u1 = Math.random();
double u2 = Math.random();
```

$u_1, u_2 \in [0, 1]$

Transformation:

$$g_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \cos(2\pi \cdot u_2)$$

$$g_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \sin(2\pi \cdot u_2)$$

per gauss variate
x1 log + x1 sqrt
+ x1 cos
vs.
~12 random-gens (CLT)

Achtung ⚠: es könnte sein, dass $u_1 == 0$

und $\log(x) \xrightarrow{x \to 0} -\infty$, also

$\log(0)$ nicht definiert!

- Jacobi-Matrix: $\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial g_1} & \frac{\partial u_1}{\partial g_2} \end{vmatrix}$

- Jacobi-Matrix: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial g_1} & \frac{\partial g_2}{\partial g_2} \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{g_1^2}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{g_2^2}{2}\right)\right]$$

- $W(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} \qquad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

↓ uniform Verteilung $UNIF(0, 2\pi)$

↘ exponential Verteilung $EXP(\lambda)$

↳ $EXP(\lambda) = \frac{-\ln(UNIF(0,1))}{\lambda}$

$$\Rightarrow r \sim \sqrt{-2 \cdot \ln(UNIF(0,1))}$$