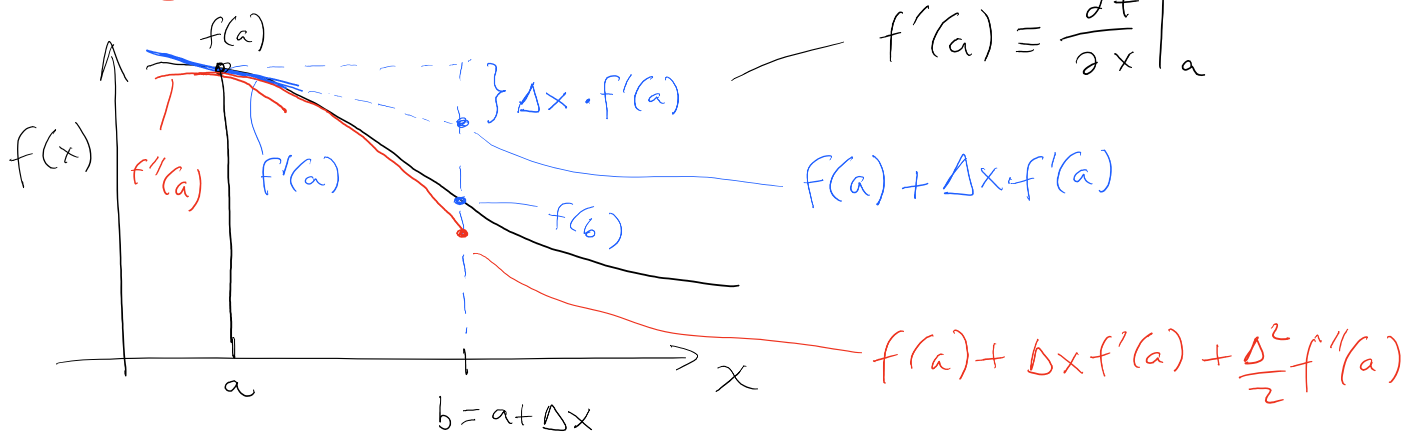
Spin 1 - Nullstellensuche mit Newton Verfahren

Monday, February 29, 2016 11:47 AM

Die Taylor Entwicklung



$$f(b) \approx f(a) + \Delta x \cdot f'(a)$$

Geht es noch besser? Ja

$$f(b) \equiv f(a+\Delta x) \cong f(a) + \Delta x\, f'(a) + \frac{1}{2}\cancel{\Delta x^2 f''(a)}$$

$$+ \frac{1}{6}\cancel{\Delta x^3 f^{(3)}(a)} + \cdots + \frac{1}{n!}\cancel{\Delta x^n f^{(n)}(a)}$$

n!

$$+ \underbrace{\mathcal{O}\left(\Delta x^{n+1}\right)}_{+\left[\frac{\Delta x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t\Delta x)\,dt\right]}$$

Ignorieren wir mal alle Terme von Ordnung 2 und höher.

$$f(a+\Delta x) \cong f(a) + \Delta x\, f'(a)$$

Nehmen wir an das unsere Funktion eine Nullstelle bei Punkt X hat

$$f(X) = 0 \qquad a + \Delta x \equiv X$$

$$0 \cong f(a) + \Delta x f'(a)$$

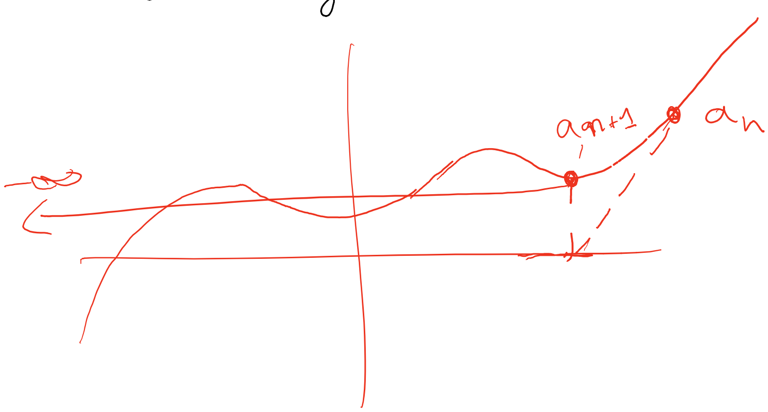
$$\Delta x \cong -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

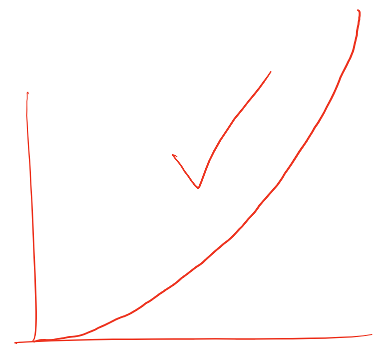
$$x \cong a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Newton Verfahren

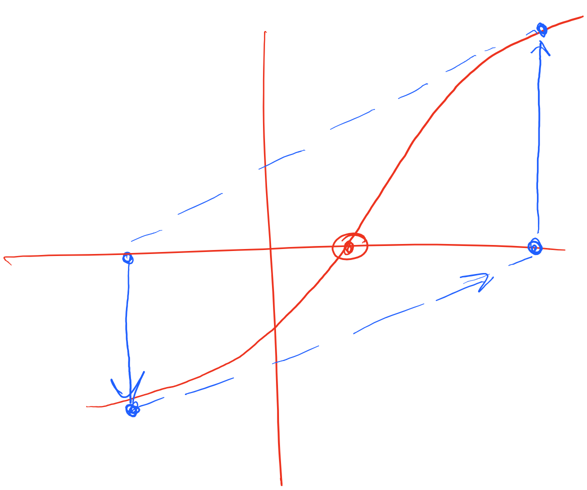
$$\boxed{a = x}$$

Jede Iteration verdoppelt die Anzahl der genauen Stellen.





Manchmal kann Konvergenz garantieren!



Zyklische Verhalten

Beispiele a) schnelle Wurzelberechnung

Beispiele a) schnelle Wurzelberechnung

$\sqrt{x}$? $\quad \sqrt{x} = x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Rechnen wir $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Hier ist aber x ein gegebener Wert und wir wollen die Lösung für $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(y) = y - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ Löse für y

Nein! Trick $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $y^2 = \frac{1}{x}$

$$f(y) = x - \frac{1}{y^2}$$

$$y \leftarrow y - \frac{x - \frac{1}{y^2}}{2\frac{1}{y^3}}$$

$$y \leftarrow y - \frac{1}{2}xy^3 + \frac{1}{2}y$$

$$y \leftarrow \underbrace{y\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}xy^2\right)}_{\text{hat keine } \div \text{ Operation nötig!}}$$

Schnell $\frac{x}{u} \longrightarrow x \cdot \frac{1}{u} \longrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$

$$\frac{x}{y} \rightarrow x \cdot \frac{1}{y} \rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

Anfangswert der so nahe wie möglich zu $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist aber es muss billig sein.

$$x = +M \times 2^{e}$$

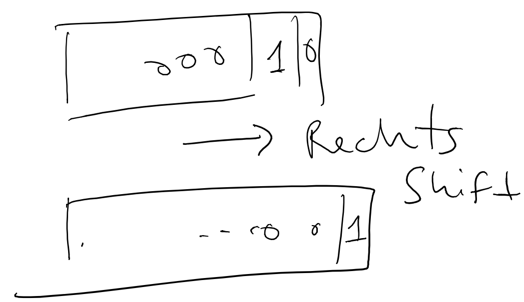
$$1 \leq M < 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \times 2^{-e/2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1$$

0,7

$e = 2$



Mittelwert für y

$$y_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.85355?$$

KEPLER GLEICHUNG

$$M = E - e \sin E$$

bekannt

Eccentricität

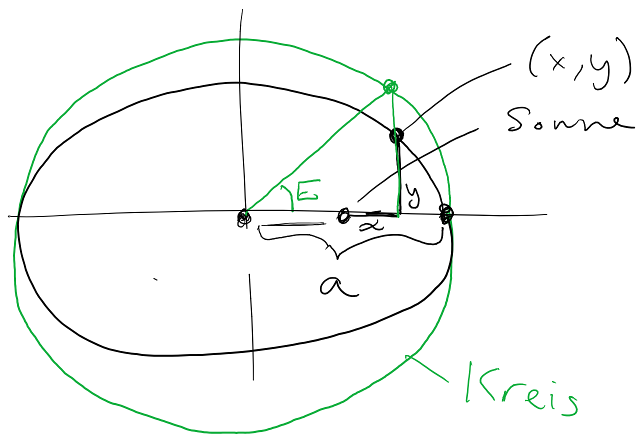
$$f(E) = E - e \sin E - M$$

$f'(E) = 1 - e\cos E$

E und M sind Winkel $E_0 = M$

$M = nt \quad n = \frac{2\pi}{T}$ ~ Periode $\quad T = a^{3/2}$

Jahren AU



$$x = a(\cos E - e)$$

$$y = \underbrace{a\sqrt{1-e^2}}_{\text{kleine Halbachse } b} \sin E$$

$$\Delta t = \frac{1}{100}$$