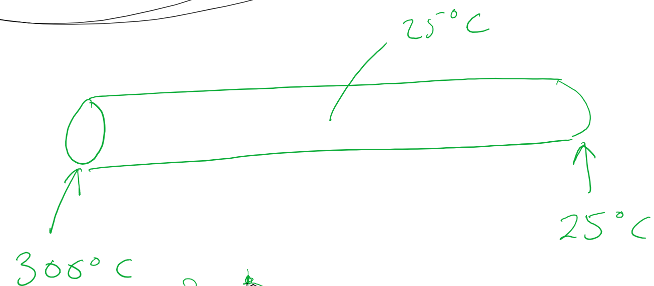
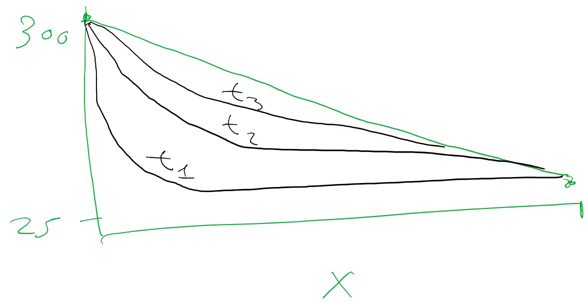
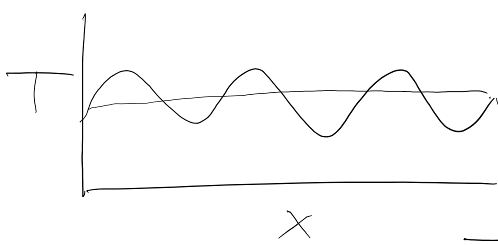
Spin 1 - Diffusionsgleichung, Impizite Methoden

Monday, May 9, 2016 1:00 PM

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u \qquad u = u(t, \underline{r})$$







Sollte sich gleichmässig verteilen

$\Rightarrow$ Eigenschaft der Lösung.

$$x \in [0, L]$$
$$t \geq 0$$

Anfangsbedingung: $u(t=0, x) = u_0(x)$

Randbedingungen: $u(t, x=0) = u_1(t)$

$u(t, x=L) = u_2(t)$

Diskretizieren: $\Rightarrow$ Numerische Methode

Gitter: $t^{(n)} = n \cdot \Delta t \,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$x_j = j \cdot \Delta x \,, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N$

$$N = \frac{L}{\Delta x}$$

$$N = \frac{L}{\Delta x}$$

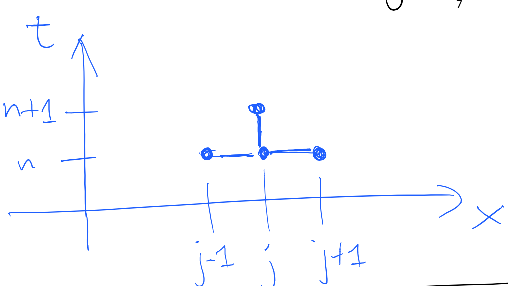
$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}}{\Delta t} \cong \frac{D}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}\right)$$

Lasse $\alpha \equiv \dfrac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}$

Schema 1: $u_j^{(n+1)} = \underbrace{u_j^{(n)} + \alpha\left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}\right)}_{\text{Alles ist hier bekannt}}$



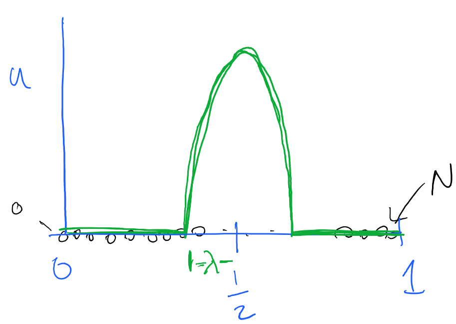
Explizite Methode!

Experiment zur Untersuchung der Stabilität

Setze: $D = 1 \quad L = x_{max} = 1$

Rand: $u = 0$ für $x = 0, 1$

Anfangsbedingung:



$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - (x-\frac{1}{2})^2/\lambda^2, & |x-\frac{1}{2}| \leq \lambda \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\lambda = 0.1$

$N = 100$

Arrays: $u_j^{(neu)}, \; u_j^{(alt)}$

$\Delta x = \dfrac{1}{N}$

2 Varianten Δt:
- $\Delta t = 4.9 \times 10^{-5}$ (stabil)
- $\Delta t = 5.1 \times 10^{-5}$ (instabil)

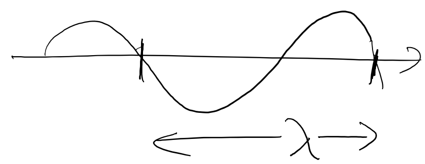
2 Varianten Δt < $\Delta t = 4.9 \times 10^{-5}$ (stabil) / $\Delta t = 5.1 \times 10^{-5}$ (instabil)

Untersuchung der Stabilität: (von Neumann)

Schauen eine Wellenförmige Störung im Schema 1.

Ansatz: $\boxed{u_j^{(n)} = \xi^n e^{ikj\Delta x}}$ $i = \sqrt{-1}$

Setze diese Lösung in das Schema 1.



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$|\xi| < 1$: Stabil — die Welle wird mit der Zeit gedämpft.

$|\xi| > 1$: Instabil — die Welle wächst explosiv!

$$u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)} = \alpha \left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)} \right) \quad \cancel{\xi^n}$$

$$(\xi - 1)\cancel{e^{ikj\Delta x}} = \alpha \left(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x} \right) \cancel{e^{ikj\Delta x}}$$

$$\xi - 1 = 2\alpha \left(\cos(k\Delta x) - 1 \right)$$

$$= -4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

$$\xi = 1 - 4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

Stabilität wenn $|\xi| < 1 \;\; \forall k$

$\sin^2() \sim [0, 1]$

$$\xi \Rightarrow 1 - 4\alpha\,[0,1]$$

$|\xi|<1$ $\quad \xi^2 \to [-1,1]$ — Bedingung

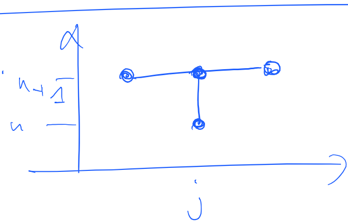
$\xi^2 \to [1-4\alpha, 1]$ ← Eigentlich

$$1-4\alpha > -1 \;!!$$

$$4\alpha < 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{2D}}$$

Schema 2:



$$u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} + \alpha\left(\underbrace{u_{j+1}^{(n+1)} - 2u_j^{(n+1)} + u_{j-1}^{(n+1)}}_{\text{Unbekannte!}}\right)$$

Implizite Methode

$$\xi = \frac{1}{1+4\alpha\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}$$

$|\xi| \le 1 \quad \forall k$ $\quad$ Immer Stabil!

Prüfung: In: 11 F 80