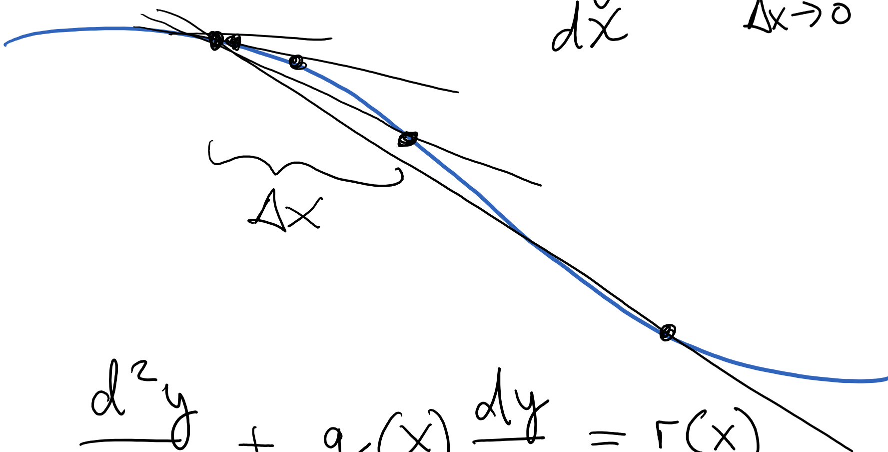
Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Monday, March 4, 2019 1:08 PM

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$$

NOT $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z(x) \\ \frac{dz}{dx} &= r(x) - q(x)\cdot z(x) \end{aligned}}$$

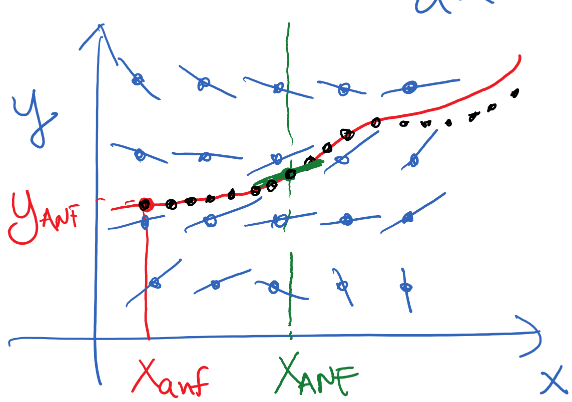
GDG (ODE)

Algemein:

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i\left(x, y_0(x), y_1(x), \dots y_{N-1}(x)\right)$$

$i = 0 .. N-1$

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y})$$



Anfangs- order Randbedingung

$y_i(X_{ANF}) = \boxed{y_i^A}$ - gegeben

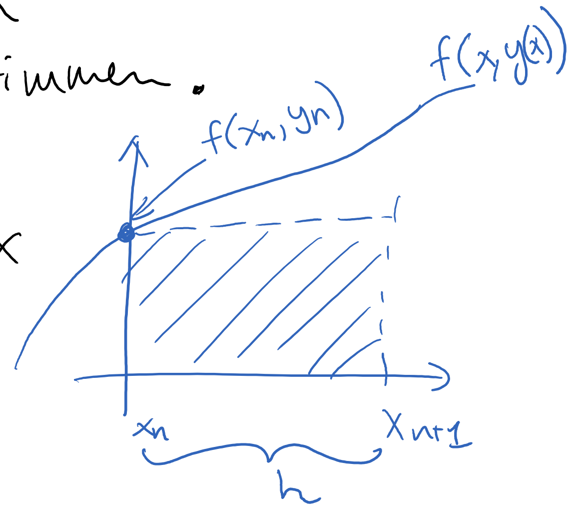
(Dirchlet)

$\frac{dy_i}{dx}(X_{ANF})$ = Neigung

(von Neumann)

Wir wollen $y(x)$ mit einen gewissen Genauigkeit bestimmen.

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = \underbrace{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx}_{f(x_n,y_n)\cdot h}$$



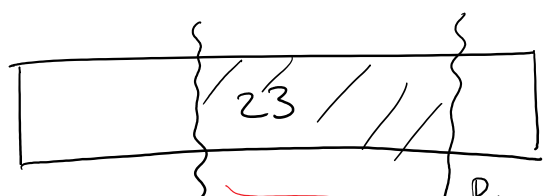
$$y_{n+1} - y_n = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)}$$

Vorwärts-Euler Methode

$y_0 \to y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_4 \; \dots$

Fehler:



Abschneide Fehler (h)

Rundungsfehler $O(\sqrt{N}$ Schritten)

Lokaler Fehler	Globale Fehler
Einen schritt	über einen gegebenen Abstand (in Raum oder Zeit)

beide hier sind Abschneide Fehler

$$\underbrace{f(x,y)}_{} \approx f(x,y_n) + (y-y_n)\cdot f'(x,y_n)$$

$+ \dots$

* hier $= f(x, y_n + (y-y_n))$!

$$y_{n+1} - y_n = h \cdot f(x_n,y_n) + h \boxed{(y-y_n)} f'(x_n,y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n,y_n) + h^2 f(x_n,y_n) f'(x_n,y_n)$$

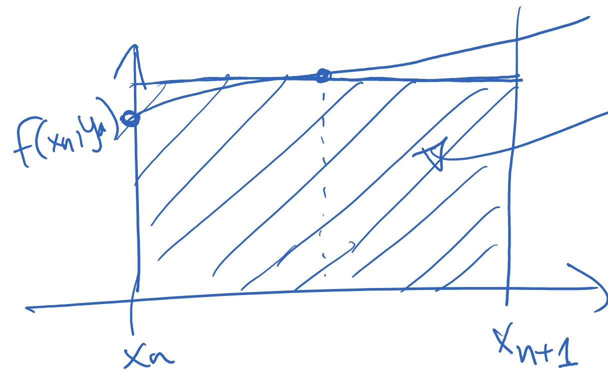
$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + h^2 f(x_n, y_n) f'(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^3)$$

Fehler $\mathcal{O}(h^2)$ pro Schritt.

Anzahl Schritte über fixem X: $N_{Schritt} = \frac{X}{h}$

Globale Fehler $\Rightarrow \mathcal{O}(h)$

Besser?



? $h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, \underbrace{y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)}_{\text{Unbekannt!}}\right)$

$$y_{n+\frac{1}{2}} \simeq y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) + \mathcal{O}(h^3) \quad \text{Midpoint Runge-Kutta}}$$

Explizit

4th order Runge-Kutta $\mathcal{O}(h^5)$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Implizit!

Räuber-Beute Verhalten

Lotka–Volterra Modell (1920)

Eichhörnchen – Adler

e a

Ohne Adler wachsen die Eichhörnchen unbeschränkt

unbeschränkt

$$\frac{\Delta e}{e} = k_e \cdot \Delta t$$

└ konstante Geburtsrate

Aber wenn Adler vorhanden sind dann reduziert sich $e \propto$ zu den Adlern

$$\frac{\Delta e}{e} = k_e \Delta t - k_{ea}\, a\, \Delta t$$

$$\boxed{\frac{de}{dt} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = k_e e - k_{ea}\, a e}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = -k_a \Delta t$$

└ Todesrate

$$\frac{\Delta a}{a} = -k_a \Delta t + k_{ae}\, e\, \Delta t$$

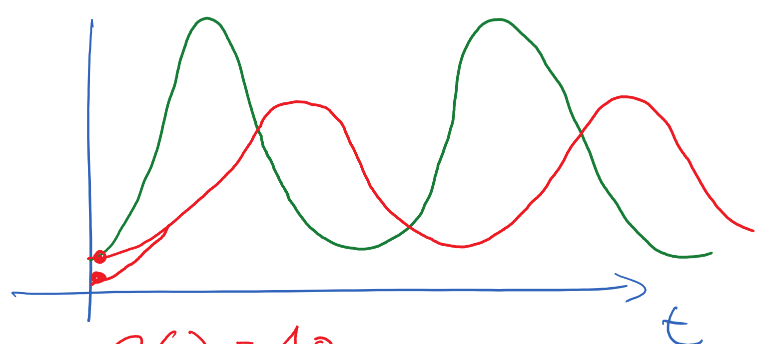
$$\boxed{\frac{da}{dt} = \frac{\Delta a}{\Delta t} = k_{ae}\, a e - k_a a}$$

$k_e = 2$

$k_{ea} = 0.02$

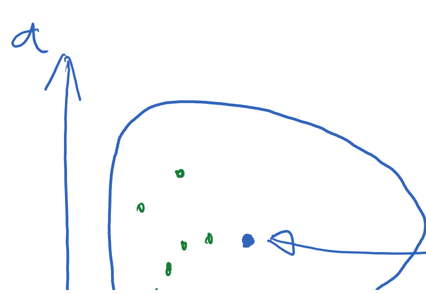
$k_{ae} = 0.01$

$k_a = 1.06$



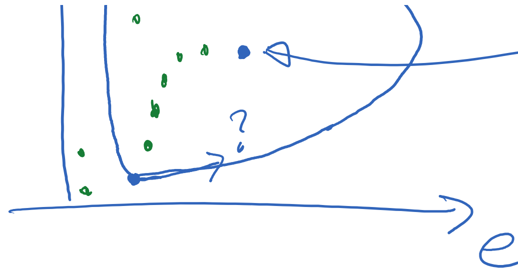
$e(0) = 10$

$a(0) = 1$



Phasendiagram

Fixpunkt



Fixpunkt

$$\frac{de}{dt} = 0$$

$$\frac{da}{dt} = 0$$